PROGRAMACIÓN MATEMÁTICAS POR ESTUDIANTES 2019 - SALÓN **SD-805**

MARTES	**MIÉRCOLES**	**JUEVES**	**VIERNES**
Registro - 8:00-9:00			
Bernardo Uribe *Grupos, grupoides y 2-grupos* 9:00-10:30	**Bernardo Uribe** *Grupos, grupoides y 2-grupos* 9:00-10:30	**Carolina Benedetti** *Álgebras de Hopf en combinatoria* 9:00-10:30	**Carolina Melo** Universidad Nacional - sede Bogotá 9:00-9:40
			Laura Guzmán University of Warwick 9:50-10:30
Descanso/Café 10:30-11:00	Descanso/Café **Sesión de Posters 1** 10:30-11:00	Descanso/Café 10:30-11:00	Descanso/Café **Sesión de Posters 2** 10:30-11:00
Carolina Benedetti *Álgebras de Hopf en combinatoria* 11:00-12:30	**Carolina Benedetti** *Álgebras de Hopf en combinatoria* 11:00-12:30	**Laura Gamboa** Universidad de los Andes 11:00-11:20	**Alejandro Rodríguez** Universidad Nacional - sede Bogotá 11:00-11:20
		Christian Olarte Universidad de Antioquia 11:30-11:50	**Edison Leguizamón** Universidad de los Andes 11:30-11:50
		Jesús Carreño Universidad Industrial de Santander 12:10-12:30	**Christian Gallego** Universidad de Antioquia 12:10-12:30
Almuerzo 12:30-14:00	Almuerzo 12:30-14:00	Almuerzo 12:30-14:00	Almuerzo 12:30-14:00
Juan Camilo Torres Universidad de los Andes 14:00-14:40	**Daniel Ávila** Université Catholique de Louvain 14:00-14:40	**Danilo Polo** Universidad del Atlántico 14:00-14:40	**Julián Cano** Universidad Nacional 14:00-14:40
Elvira Moreno Universidad de los Andes 14:50-15:30	**Joel Torres** Universidad de Antioquia 14:50-15:30	**Leonardo Chacón** Universidad Javeriana 14:50-15:30	**Andrés Galindo** Michigan State University 14:50-15:30
Descanso/Café 15:30-16:00	Descanso/Café 15:30-16:00	Descanso/Café 15:30-16:00	Descanso/Café 15:30-16:00
Bernardo Uribe *Grupos, grupoides y 2-grupos* 16:00-17:30	**Johan García** Universidad de los Andes 16:30-16:50	TARDE LIBRE	**Tatiana Zuluaga** Universidad de los Andes 16:00-16:20
	Juan Felipe Ruiz Universidad Nacional - sede Medellín 16:30-16:50		**Jerson Borja** Universidad de Córdoba 16:30-17:10
	Fabian Sánchez Universidad Central 17:00-17:40		

MARTES - Diciembre 10

09:00-10:30	Cursillo: **Bernardo Uribe**. Universidad del Norte. *Grupos, grupoides y 2-grupos.*

Resumen: En el cursillo presentaré algunas construcciones topológicas basadas en grupoides y 2-grupos, así como algunas de las preguntas abiertas que creo yo son importantes.

10:30-11:00 **Descanso/Café**.

11:00-12:30	Cursillo: **Carolina Benedetti**. Universidad de los Andes. *Álgebras de Hopf en combinatoria.*

Resumen:

12:30-14:00 **Almuerzo**.

14:00 - 14:40	**Juan Camilo Torres**. Universidad de los Andes *Polítopos gráficos y polítopos de orden proyectivamente únicos.*

Resumen: El *ideal de holgura* de un polítopo contiene la información combinatórica de este y es útil para el estudio de su espacio de realizaciones (salvo equivalencias proyectivas). Si este ideal es igual a cierto ideal tórico, entonces el polítopo es proyectivamente único. Polítopos cuyos ideales de holgura tienen esta propiedad se conocen como polítopos gráficos. En esta charla explicaremos estos conceptos y demostraremos que las operaciones (entre polítopos) de unión (join) y suma sobre un vértice preservan la propiedad de ser un polítopo gráfico. Además daremos condiciones suficientes para que también se preserve graficalidad en las operaciones de ruptura de vértice y cuña sobre una faceta.
Aplicaremos estos resultados al estudio de polítopos de orden, una clase de polítopos que se construyen a partir de posets finitos. En particular, veremos como corresponden operaciones sobre posets finitos a operaciones sobre sus polítopos de orden. Usaremos esto para demostrar que todo polítopo de orden que proviene de un poset finito ranqueado sin ninguna anticadena de tamaño 3 es proyectivamente único.
Este proyecto se realiza en conjunto con los profesores Tristram Bogart y João Gouveia.

14:50 - 15:30	**Elvira Moreno**. Universidad de los Andes *Acotamiento del Radio Espectral Conjunto usando Optimización Semidefinida*

Resumen: Consideramos el siguiente sistema lineal de tiempo discreto:

$$x_{k+1} = A_{i_k} x_k \qquad (1)$$

donde la matriz A_{i_k} es elegida en cada iteración de un conjunto dado de matrices $\Sigma := \{A_1, \ldots, A_m\}$. El radio espectral del conjunto de matrices Σ está dado por:

$$\rho(\Sigma) = \lim_{k\to\infty} \max_{\sigma\in\{1,\ldots,m\}^k} ||A_{\sigma_k} \cdots A_{\sigma_1}||^{1/k}.$$

Como en el caso del sistema lineal discreto con una sola matriz, la estabilidad asintótica del sistema (1) se obtiene si y solo si $\rho(\Sigma) < 1$. Sin embargo, existe una diferencia fundamental entre estos dos tipos de sistemas: si bien podemos determinar si el radio espectral de una matriz es menor a uno en tiempo polinomioal, verificar la misma condición para un conjunto de dos matrices constituye un problema indecidible.

En esta charla se discutirán condiciones suficientes y necesarias para la estabilidad asintótica de sistemas de la forma (1). A grandes rasgos, estas condiciones consisten en la existencia de polinomios homogéneos que satisfagan ciertas condiciones de positividad, por lo cual pueden ser determinadas mediante la factibilidad de problemas de optimización semidefinida. Además, se establecerán condiciones suficientes para la estabilidad de sistemas lineales intercalados en casos donde el conjunto de matrices Σ es infinito y satisface ciertas propiedades de simetría. Por otro lado, evaluaremos la estabilidad del sistema (1) bajo cierto grado de robustez, es decir, permitiendo que las matrices a elegir varíen ligeramente de las matrices pertenecientes a un conjunto inicial finito Σ. Esto último es de gran utilidad en la práctica, pues las matrices del sistema suelen ser estimadas y es pertinente evaluar cómo pequeños cambios en sus entradas pueden afectar el comportamiento del mismo.

15:30-16:00 **Descanso/Café**.

16:00-17:30	Cursillo: **Bernardo Uribe**. Universidad del Norte. *Grupos, grupoides y 2-grupos.*

MIÉRCOLES - Diciembre 11

09:00-1:30	Cursillo: **Bernardo Uribe**. Universidad del Norte. *Grupos, grupoides y 2-grupos.*

10:30-11:00 **Descanso/Café y Sesión de Posters 1**.

11:00-12:30	Cursillo: **Carolina Benedetti**. Universidad de los Andes. *Álgebras de Hopf en combinatoria.*

12:30-14:00 **Almuerzo**.

14:00 - 14:40	**Daniel Ávila**. Center for Operations Research and Econometrics (CORE). Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Bélgica. *Integración de energías renovables , Optimización Estocástica y Cómputo en paralelo.*

Resumen: La integración de los recursos renovables a las redes de distribución energéticas presenta desafíos particulares. La incertidumbre inherente en las energías renovables y la vastedad de dispositivos potencialmente controlables hacen de este problema difícil desde un punto de vista computacional. Es de esta dificultad que surge la necesidad de usar herramientas de optimización estocástica y High Performance Computing (HPC) con el fin de crear algoritmos que puedan atacar estos problemas en un limite de tiempo adecuado.

El objetivo de la charla es presentar el algoritmo denominado Stochastic Dual Dynamic Porgramming (SDDP). Dicho algoritmo ha sido empleado con éxito para determinar los niveles óptimos en embalses hidroeléctricos, donde la incertidumbre esta dada por la lluvia. Es por tanto un algoritmo interesante para considerar en problemas relacionados con distribución óptima en redes energéticas.

Con este fin la charla pretende introducir los conceptos de optimización estocástica: Two Stage Stochastic Program y Multi Stage Stocasthic Program, para luego discutir técnicas de optimización para atacar estos problemas. Entre dichas técnicas encontramos los denominados Cutting Plane Methods, donde los conceptos de dualidad son explotados para constriur hiperplanos de soporte, y Dynamic Programming, donde el problema de optimización se simplifica reduciéndolo en sub problemas. Finalmente se discutirán algoritmos altamente paralelizables, como SDDP, que son capaces de explotar los recursos computacionales.

14:50 - 15:30	**Joel Torres del Valle**. Universidad de Antioquia *Geometrías de Zariski.*

Resumen: En las matemáticas clásicas se han estudiado de manera extensiva tres nociones de independencia, a saber, (1) independencia algebraica en campos, (2) independencia lineal en espacios vectoriales, y (3) independencia de un tipo combinatorio desintegrado. Zilber conjeturó el Principio de tricotomía: toda dependencia en teorías incontablemente categóricas pertenece a uno de los tres tipos anteriores. En 1988 Hrushovski mostró que el Principio de tricotomía es falso en general. Sin embargo, Zilber-Hrushovski construyeron una clase de estructuras fuertemente minimales donde el Principio de tricotomía sí es cierto, dentro de esta clase tenemos las curvas algebraicas suaves, las variedades analíticas complejas compactas, entre otras. El resultado principal de la teoría clásica por Zilber-Hrushovski es que bajo ciertas condiciones de amplitud, toda geometría de Zarski unidimensional es isomorfa a una curva algebraica suave sobre un campo algebraicamente cerrado, ambos únicos salvo isomorfismos. El propósito de esta charla es presentar las ideas principales en el trabajo de Zilber-Hrushovski.

Referencias

[1] Bouscaren, E. (eds) *Model Theory and Algebraic geometry: an introduction to E. Hrushovski proof of the Mordell-Lang conjecture.* Lecture Notes in Mathematics, vol 1696. Springer, Berlin, Heidelberg.

[2] Chang C. and Keisler H. *Model Theory*, Dover Books on Mathematics, Ed. 3, 2013.

[3] Gunning R. and Rossi H. *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall Inc. 1965.

[4] Harris J. *Algebraic geometry: a first course.* Springer Verlag. 1992. 1

[5] Hartshorne R. *Algebraic Geometry*, Springer Graduated Texts in Mathematics 52, 2006.

[6] Hrushovski E. and Zilber B. *Zariski Geometries*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 28, No. 2. 1993.

[7] Hrushovski E. and Zilber B. *Zariski Geometries*, Journal of the American Mathematical Society, Vol. 9, No. 1. 1996.

[8] Zilber B. *Zariski Geometries: Geometry from the Logicians point of view.* London Mathematical Society, 2010.

[9] Zilber B. *Model theory and algebraic geometry*, In: Proc. 10th Easter Conference on Model Theory (wendisch Rietz, 1993), Seminarberichte 93, Humboldt Univ. Berlin, 93–117.

15:30-16:00 **Descanso/Café**.

16:00 - 16:20	**Johan Felipe García Vargas**. Universidad de los Andes. *Grupos, álgebras de Hopf y mónadas de Hopf*

Resumen: El objetivo de esta charla es motivar la definición de mónada de Hopf, introduciendo el lenguaje necesario y exhibiendo las propiedades de un grupo que deseamos generalizar.

Iniciaremos presentando dos abstracciones categóricas del concepto de monoide: las mónadas y las categorías monoidales. Las mónadas capturan la relación entre un monoide (un grupo, una teoría ecuacional, etc.) y la categoría de sus acciones (representaciones lineales, modelos, respectivamente). Por otro lado, las categorías monoidales son el entorno natural para componer morfismos tanto en serie como en paralelo, y así poder definir monoides y morfismos paramétrizados (homomorfismos internos). Por ejemplo, las álgebras (asociativas) son precisamente los monoides en la categoría de espacios vectoriales con el producto tensorial.

Luego hablaremos de álgebras de Hopf, estas son álgebras dotadas de una co-multiplicación y una antípoda. Explicaremos como la co-multiplicación permite levantar el producto tensorial y como la antípoda permite levantar los espacios duales. Mostraremos que la definición de grupo y de álgebra de Hopf se reducen a la conmutatividad de idénticos diagramas.

Una mónada de Hopf será una monada en una categoría monoidal capaz de levantar el producto monoidal y los homomorfismos internos. Esta definición extiende los conceptos de grupo, álgebra de Hopf y varias otras construcciones algebraicas de simetrías; por ejemplo, la primera vez que se formuló esta definición se hizo para entender la relación entre ciertas categorías de fusión y su centro, y así explicar la relación entre dos tipos de invariantes algebraicos de 3-variedades.

Para entender la flexibilidad y variadas aplicaciones de un lenguaje tan abstracto, recomiendo leer [1]. La definición y propiedades principales de una mónada de Hopf apareció originalmente en [3]. Los interesados en álgebra pueden consultar [2], y los interesados en invariantes topológicos pueden leer [4].

Referencias

[1] Baez, J., y Stay, M. (2010). *Physics, topology, logic and computation: A rosetta stone.* En *New structures for physics* (p. 95-172). Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-12821-92

[2] Böhm, G. (2018). *Hopf algebras and their generalizations from a category theoretical point of view.* Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-98137-6

[3] Bruguières, A., Lack, S., y Virelizier, A. (2011). *Hopf monads on monoidal categories.* Advances in Mathematics, 227 (2), 745 - 800.

[4] Turaev, V., y Virelizier, A. (2017). *Monoidal categories and topological field theory* (Vol. 322). Birkhäuser Basel. doi: 10.1007/978-3-319-49834-8

16:30 - 16:50	**Juan Felipe Ruíz Castrillón**. Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín. *Una aproximación categórica de varias teoría Galoisianas*

Resumen: There are several different incarnations of Galois theory, from the classical Galois theory of finite algebraic extensions to recent generalizations of differential Galois theory. Those theories are related by analogy. In this talk we'll discuss the concept of Galois structure and Galois epimorphism in a general setting. Namely, a Galois structure for an epimorphism $\pi : M \to B$ in some category $\mathcal{C}$ is the action of a group object that gives to M the structure of principal homogeneous space in the relative category $\mathcal{C}_B$, with this we give a framework that covers the classical theory of Galois and the differential theory of Galois.

Hay varias encarnaciones diferentes de la teoría de Galois, desde la teoría clásica de Galois de extensiones algebraicas finitas hasta las generalizaciones recientes de la teoría diferencial de Galois. Esas teorías están relacionadas por analogía. En esta charla discutiremos el concepto de estructura de Galois y epimorfismo de Galois en un panorama general, llamaremos estructura de Galois de un epimorfismo $\pi : M \to B$ en una categoria $\mathcal{C}$ a la acción de un objeto grupo que da a M estructura de espacio principal homogéneo en la categoría relativa $\mathcal{C}_B$, de esta forma damos un marco que cubre la teoría clásica de Galois y la teoría diferencial de Galois.

Keywords: Galois theory, Differential algebra, Foliation, Groupoid, Principal bundle.

Referencias

[1] Blazquez Sanz, D. and Marín, C. and Ruiz Castrillon, J. F. *A simplified categorical approach to several Galois theories.* Submitted to Cahiers de topologie et geometrie differentielle categoriques

[2] M. Artin, A. Grothendieck and J. Verdier. *SGA4* (1963-64). Lecture Notes in Mathematics 269 (1972).

[3] A. Buium. *Differential Function Fields and Moduli of Algebraic Varieties.* Springer Verlag, 1986.

[4] E. Galois. *Oeuvres Mathématiques, publieés en 1846 dans le Journal de Liouville.* Editions Jaques Gabay, 1989.
[5] A. Grothendiek et al. *SGA1 Revêtements étales et groupe fondamental, 1960–1961.* Lecture Notes in Mathematics 224. Springer Verlag,1971.
[6] E. R. Kolchin. *Differential Algebra and Algebraic Groups.* Academic Press, 1973.
[7] J. J. Kovacic. *The differential Galois theory of strongly normal extensions.* Trans. Am. Math. Soc. 355(11) (2003) 4475–4522.
[8] E. Dubuc Localic *Galois Theory.* Advances in Mathematics 175 (2003) 144–167.

17:00 - 17:40	**Fabián Sánchez**. Universidad Central *titulo*

Resumen:

JUEVES - DICIEMBRE 12

09:00-10:30	Cursillo: **Carolina Benedetti**. Universidad de los Andes. *Álgebras de Hopf en combinatoria.*

10:30-11:00 **Descanso/Café**.

11:00-11:20	**Laura Paola Gamboa Guzmán**. Universidad de los Andes. *Modelos para la lógica de Gödel-Kripke basados en conjuntos aproximados.*

Resumen: La teoría de conjuntos aproximados (en inglés: rough set theory) se puede ver como un acercamiento matemático a la imprecisión, en donde, a diferencia de los universos clásicos en matemáticas, se permite la existencia de objetos que no se pueden clasificar únicamente como pertenecientes a un conjunto o a su complemento. Esto nos permite razonar con conceptos imprecisos, tales como "Juan es posiblemente alto" o "Juan es necesariamente alto", donde la proposición "Juan es alto" se trabaja como una proposición imprecisa.

En el artículo de Xavier Caicedo y Ricardo Oscar Rodriguez, A Gödel Modal Logic (`https://doi.org/10.1007/s11225-010-9230-1`) se da una semántica para la lógica modal de Gödel se da en términos de modelos de Kripke difusos para los operadores modales, de manera que los valores de verdad tanto para las fórmulas en cada punto del universo como para la relación de accesibilidad entre puntos del universo se da mediante valores numéricos en el intervalo $[0, 1]$. Tomando como inspiración ese artículo, aquí se propone una interpretación del lenguaje en términos de conjuntos aproximados en lugar de valores numéricos, esto aprovechando la similitud que existe entre las estructuras algebraicas correspondientes. Finalmente, se realiza una comparación entre ambas interpretaciones, tanto del fragmento proposicional como del fragmento $\Box$.

11:30-11:50	**Cristian Danilo Olarte Sepúlveda**. Universidad de Antioquia. *C^∞-Anillos y C^∞-Geometría Algebraica.*

Resumen: Si X es una variedad suave, el conjunto $C^\infty(X)$ de funciones realvaluadas que toman valores en X, tiene estructura de $\mathbb{R}$-álgebra con las operaciones entre funciones definidas punto a punto. El punto de partida de la C^∞-Geometría algebraica es que dada cualquier función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n$ se puede definir en $C^\infty(X)$ una operación n-aria $\phi_f : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$, por

$$\phi_f(c_1, \ldots, c_n)(x) = f(c_1(x), \ldots, c_n(x))$$

para cada $x \in X$, dotando a $C^\infty(X)$ de una estructura más rica que la de $\mathbb{R}$-álgebra. Los conjuntos para los cuales pueden definirse estas operaciones son llamados C^∞-anillos. En esta charla se dará la definición general de C^∞-anillo y se mostrará, en primer lugar que estos constituyen una categoría en la cual puede ser embebida la categoría de variedades suaves, luego se verá cómo se pueden desarrollar para C^∞-anillos, algunas construcciones que aparecen en la teoría de anillos usual, tales como productos tensoriales y localizaciones, además algunos teoremas clásicos de anillos que tienen su versión en esta categoría, como lo es el teorema de los ceros de Hilbert. Finalmente se comentará cómo la teoriá de C^∞-anillos sugiere la construcción de una teoría de C^∞-esquemas y cuáles serían sus limitaciones y ventajas con respecto al desarrollo de la teoría de esquemas en geometría algebraica ordinaria.

12:10-12:30	**Jesús Fernando Carreño Díaz**. Universidad Industrial de Santander. *obre copias de $c_0(\Gamma)$ en un espacio de medidas vectoriales*

Resumen: En esta charla estudiaremos copias de $c_0(\Gamma)$ en un espacio de Banach de medidas vectoriales. Para Γ un conjunto, denotaremos por ℓ^∞ el espacio de Banach de todas las familias $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ acotadas, dotados con la norma del supremo. Además, $c_0(\Gamma)$ representa el subespacio cerrado de $\ell^\infty(\Gamma)$ que consta de todas las familias $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : |a_\gamma| \geq \epsilon\}$ es finito. En el caso donde Γ sea contable, estos espacios se denotan por ℓ^∞ y c_0, respectivamente. Si X e Y son espacios de Banach, escribimos $X \to Y$ si Y contiene copia de X, es decir, Y tiene un subespacio isomorfo a X. Otras definiciones y notaciones usadas aquí pueden ser encontradas en [1, 2, 3].

Sean (Ω, Σ) un espacio de medida y $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach. Si $\mu : \Sigma \to X$ es una medida vectorial y $E \in \Sigma$, definimos la variación de μ sobre E por

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{A \in \Pi} ||\mu(A)|| : \Pi \text{ es una } \Sigma\text{-partición de } E \right\}.$$

Diremos que μ es de variación acotada si $|\mu|(E) < \infty$ para todo $E \in \Sigma$. El conjunto $\mathrm{ba}(\Sigma, X)$ denota el espacio de Banach de todas las medidas vectoriales con valores en X de variación acotada, dotado con la norma de variación que se define por $||\mu||_{\mathrm{ba}} = |\mu|(\Omega)$ para $\mu \in \mathrm{ba}(\Sigma, X)$.

Si Ω es un espacio localmente compacto Hausdorff, la σ-álgebra de Borel de Ω es denotada por $\mathcal{B}_\Omega$. Una medida vectorial $\mu : \mathcal{B}_\Omega \to X$ es llamada regular si para cada $E \in \mathcal{B}_\Omega$ y $\epsilon > 0$, existen un conjunto compacto C y un conjunto abierto U en Ω tal que $C \supset E \subset U$ y $|\mu|(U \setminus C) < \epsilon$. Denotaremos por $M(\Omega, X)$ el espacio de todas las medidas σ-aditivas, regulares y de variación acotada con valores en X, definidas sobre $\mathcal{B}_\Omega$, dotado con la norma de variación $||\cdot||_{\mathrm{ba}} := ||\cdot||_M$.

En esta presentación nosotros consideraremos el problema de determinar cuando $M(\Omega, X)$ contiene un copia de $c_0(\Gamma)$. En [4] se probó que si X no contiene copia de c_0, entonces

$$c_0 \to M(\Omega, X) \Leftrightarrow \ell^\infty \to M(\Omega, X).$$

El objetivo de la charla es demostrar que el teorema anterior también es válido para $c_0(\Gamma)$. Para ello, nos proponemos presentar los siguientes resultados:

Proposición 1. Sea X un espacio de Banach que no contiene copia de $c_0(\Gamma)$. Si $T : c_0(\Gamma) \to M(\Omega, X)$ es un operador lineal acotado, entonces existe un operador lineal $\tilde{T} : \ell^\infty \to M(\Omega, X)$ tal que $\tilde{T}|_{c_0(\Gamma)} = T$ y $||\tilde{T}|| = ||T||$.

Corolario 2. Sea X un espacio de Banach que no contiene copia de $c_0(\Gamma)$. Tenemos que $c_0(\Gamma) \to M(\Omega, X) \Leftrightarrow \ell^\infty(\Gamma) \to M(\Omega, X)$.

Corolario 3. Sea X un espacio de Banach. Entonces $M(\Omega, X)$ contiene copia de $c_0(\Gamma)$ si, y solo si, se satisface una de las siguientes dos condiciones:

1. X contiene copia de $c_0(\Gamma)$, o
2. $M(\Omega, X)$ contiene copia de $\ell^\infty(\Gamma)$).

Palabras Claves: Espacios de Banach, Medidas vectoriales.

Referencias

[1] Albiac F., Kalton N. J. *Topics in Banach space theory.* Graduate Texts in Mathematics, 233. Springer, New York, 2006.

[2] Banach S. *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1933.

[3] Lacey H.E. *The isometrical theory of classical Banach spaces*, SpringerVerlag, Berlin and New York, 1974.

[4] Picón A., Piñero C. *Vector measure Banach spaces containing a complemented copy of c0. Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2004), 2893-2898.

[5] Rosenthal, H. P. *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math. 37 (1970), 13-36.

12:30-14:00 **Almuerzo**.

14:00 - 14:40 **Danilo José Polo Ojito**. Universidad del Atlántico
Representation of algebras with indefinite involution and Krein C^*-algebras

Resumen: An involution is one of most important structures on operator algebras. Especially, the C^*-condition is a nice characterization of a special involution with respect to the norm. On the other hand, properties of the involution on the algebra of field operators in quantum field theory is not well-known. For example, the involution on the algebra $\mathcal{A}$ of field operators in quantum electrodynamics satisfies neither the C^*-condition nor the positivity of the spectrum of the operator $I + x^*x$ for $x \in \mathcal{A}$. The aim of this talk is to show some properties of algebras with indefinite involution i.e. An algebra $\mathcal{A}$ with an involution $\dagger$ such that a representation of the involutive algebra $(\mathcal{A}, \dagger)$ brings an indefinite-metric space. We replace the involution $*$ of a $*-$algebra $(A, *)$ with a new one $\dagger$ such that $(\mathcal{A}, \dagger)$ is a indefinite involutive algebra acting on a representation space with indefinite metric, for example a covariant (Hilbert space) representation $(H, \pi.U)$ of an involutive dynamical system $((\mathcal{A}, *), \mathbb{Z}_2, \alpha)$ brings a Krein

space representation of the algebra $\mathcal{A}$ with the replaced involution. In addition, I will show the main spectral properties of the Krein C^*-algebras (Banach algebras with indefinite involution).

Referencias

[1] Bertozzini, P., Rutamorn, K.: Krein C*-modules, arXiv:1409.1343v1, (2013).
[2] Kawamura, K.: Algebra with Indefinite Involution and its Representation in Krein Space. arXiv:math/0610059v2. (2006)
[3] Kaewumpai, S.: Krein C*-modules, Masterâs thesis Thammasat, University Bangkok.(2006).
[4] Bannangkoon, P., Bertozzini, P., Lewkeeratiyutkul, W.: Spectral Theory on Commutative Krein C*-algebras. arXiv:1409.1329 (2014)
[5] Kawamura, K.: Indefinite-metric quantum field theory and operator algebra arXiv:math/0608076 (2006)

14:50 - 15:30 **Leonardo Chacón**. Pontificia Universidad Javeriana
Introducción a los números p-ádicos y sus aplicaciones

Resumen: Esta charla se divide en tres partes, en la primera parte se introducen los números p-ádicos (vía análisis), su topología, el espacio de Bruhat-Schwartz y la transformada de Fourier, ver por ejemplo [1] y [2]. En la segunda parte se introducen los operadores pseudo-diferenciales no locales sobre $\mathbb{Q}_p$, además se estudia el problema de Cauchy asociada a estos operadores y las propiedades de su solución. Finalmente, se presentará una aplicación de los números p-ádicos, ver por ejemplo [3] y [4].

Palabras claves: Números p-ádicos, Operadores no locales, Ecuaciones de ultra-difusión.

Referencias

[1] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, and E. I. Zelenov. *P-adic analysis and mathematical physics.* Advanced Mathematics: Computations and Applications, pages 128-141,1994.
[2] Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.: *Theory of p-adic distributions: linear and nonlinear models.* Cambridge University Press, 2010.
[3] L. F. Chacón-Cortés and Andrés Vargas, *Blow-up Phenomena for p-adic semilinear Heat equations.* p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications July 2017, Volume 9, Issue 3, pp 183-196 1
[4] Chacón-Cortés L. F., Zuñiga-Galindo W. A., *Nonlocal Operators, Parabolictype Equations, and Ultrametric Random Walks*, J. Math. Phys. 54, 113503 (2013). 4. Erratum 55, 109901 (2014).

15:30-16:00 **Descanso/Café**.

VIERNES - Diciembre 13

09:00 - 09:40	**Astrid Carolina Melo Lopez**. Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogota *Álgebras de conglomerado y ecuaciones diofánticas asociadas.*

Resumen: Las álgebras de conglomerado fueron introducidas por Fomin y Zelevinsky en [2] en el 2000. Estas fueron encontradas en el marco de investigación que concierne la positividad de los menores de una matriz y a las bases canónicas en la teoría de Lie, desde entonces este tema se ha convertido en una de las áreas de investigación de más dinamismo. Un álgebra de conglomerado $\mathcal{A}$ es una subálgebra de un campo de funciones racionales en N variables $x_1, \ldots, x_N$. $\mathcal{A}$ está dada por un conjunto específico de generadores denominados variables de conglomerado, los cuales se pueden construir recursivamente por un proceso de mutación. En 2002 Fomin y Zelevinsky probaron que toda variable de conglomerado es un polinomio de Laurent en las variables iniciales $x_1, \ldots, x_N$ y conjeturaron que los coeficientes de estos polinomios son siempre positivos. La prueba de esta conjetura la obtuvieron en el 2014 K. Lee y R. Schiffler [4]. En el 2018, Schiffler y sus colaboradores describieron interesantes relaciones entre algunas ecuaciones diofánticas conocidas, como las ecuaciones de Markov cuyas soluciones se llaman triplas de Markov y las álgebras de conglomerado. En esta ponencia se describirán algunos de los resultados mencionados anteriormente y, producto del trabajo final de Maestría en Ciencias - Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogota, se presenta como aporte original las soluciones a la ecuacion diofántica

$$(a+d)(ad+b^2+c^2)+bc(1+a^2+d^2)=9abcd.$$

Palabras clave: Álgebra de conglomerado, Ecuación diofántica, Polinomios de Laurent, Ecuacion de Markov, Sucesión Dana Scott.

Referencias

[1] Aigner, M. *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture - 2013.* A Mathematical Journey from Irrational Numbers to Perfect Matchings. Freie Universitat Berlin, Berlin, Germany(2013)

[2] Fomin S. and Zelevinsky A. *Cluster algebras I: Foundations*, vol. 15. Journal of the American Mathematical Society(2000)

[3] Lampe P. *Cluster Algebras*, Department of Mathematical Sciences, Durham University, United Kingdom(2013)

[4] Lee K. and Schiffler R. *Positivity for cluster algebras*, arXiv e-prints: arXiv:1306.2415(2014)

09:50 - 10:30	**Laura Guzmán**. University of Warwick *Detección de Epidemias de campylobacteriosis usando Modelos Jerárquicos Bayesianos*

Resumen: En las últimas décadas la recolección y el análisis de datos han adquirido gran importancia. La información extraída de estos puede ser usada inteligentemente para ganar conocimiento y tomar mejores decisiones. Por ejemplo, uno de los campos más beneficiados es el sector de la salud. La charla se enfocará en describir la solución a un problema presentado por Public Health England (PHE), entidad británica encargada de administrar el sistema de salud. El problema consiste en analizar los casos registrados de una enfermedad para detectar posibles epidemias, donde los datos tienen tres variables: espacial, temporal y genético. Para ello se utiliza un modelo jerárquico bayesiano mezclado con un proceso gaussiano, que detectará si hay un incremento de casos mayor que el esperado. La charla también resumirá otros problemas resueltos con modelos jerárquicos bayesianos y, en general, se explicarán otros problemas que disponen de grandes cantidades de datos.

La enfermedad analizada se conoce como campylobacteriosis y es causada por la ingesta de alimentos infectados con bacterias del género campylobacter. Las principales fuentes de ingestión en el Reino Unido son pollo, ganado, agua contaminada y leche sin pasteurizar REF. Siendo la causa de envenenamiento número uno en el Reino Unido, PHE recolecta los casos reportados en hospitales, incluyendo la fecha en la que se hace el registro, el lugar de residencia del paciente y la secuencia genética completa de la bacteria extraída del paciente. Este proyecto dispone de los registros de dos condados, Oxfordshire y Tyne and Wear, con un total de 4 mil secuencias tomadas de 3 mil pacientes. Para crear el modelo, los datos son agregados espacial, temporal y genéticamente. En el caso temporal, la agregación puede ser mensual, semanal, por mencionar algunos ejemplos, identificados con la etiqueta i. En el caso espacial, se siguen las divisiones locales, identificado con j. En el caso genético, las secuencias son agregadas utilizando agrupamiento jerárquico, identificado con k.

En el modelo propuesto, el conteo de casos y_{ijk} en cada agregado ijk se describe con una distribución de Poisson:

$$y_{ijk}|n_j, \mu_{ijk} \sim \text{Poisson}(n_j\mu_{ijk}),$$

donde el parámetro de la distribución depende de la población del lugar n_j, y el riesgo de una persona de contraer la enfermedad μ_{ijk}. El logaritmo de μ_{ijk} se descompone en cuatro variables:

$$\log \mu_{ijk} = \alpha + R_i + S_j + G_k + X_{ijk}B_k,$$

es decir, una constante α, una variable temporal R_i, una variable espacial U_j, una variable genética G_k, y un término extra $X_{ijk}B_k$. El ultimo termino, siendo positivo, permite capturar posibles incrementos inexplicados por las otras tres variables, capturando posibles outbreaks. Cada uno de los términos espacial, temporal y genético debe ser suavizado para describir los casos esporádicos. Por tanto, los términos temporal y espacial se describen usando campos aleatorios de Markov (GMRF) como se muestra a continuación:

$$R_{i+1} - R_i | \tau_R, R_{1:i} \sim \mathcal{N}(R_i - R_{i-1}, \tau_R^{-1}),$$
$$S_{j+1} - S_j | \tau_S, S_{-j} \sim \mathcal{N}(S_j - S_{j-1}, \tau_S^{-1}).$$

Del mismo modo, el término genético se describe usando un proceso Gaussiano:

$$\boldsymbol{G}|\tau_G, \rho \sim \mathrm{MVN}(0, \boldsymbol{\Sigma w}),$$
$$[\boldsymbol{\Sigma}]_{kk'} = \tau_G^{-1} \exp\left(-\frac{d_{kk'}}{\rho}\right).$$

Finalmente, el término X_{ijk} toma valores en $\{0, 1\}$ y viene dado por:

$$X_{ijk}|p \sim \mathrm{Bernoulli}(p).$$

El modelo es implementado usando algoritmos MCMC.

Adicionalmente, en la charla se mostrarán otros problemas que surgen gracias a la recolección de datos. En particular, se mostrará el análisis de los casos del conflicto armado colombiano usando el registro de las víctimas en los últimos 60 años, publicado por el centro de memoria histórica en el año 2018. Usando un modelo jerárquico bayesiano más sencillo que el mostrado anteriormente, se pueden ver las dinámicas espacio-temporales de los casos de conflicto. Otros ejemplos incluyen: el análisis de la propagación del retraso en trenes que se genera en la estación de Paddington en Londres, la detección y el análisis de la distribución de focas en la antártica usando imágenes satelitales, y la predicción de la duración de tráfico en las vías del Reino Unido.

10:30-11:00 **Descanso/Café y Sesión de Posters 2**.

11:00 - 11:20 **Alejandro Rodríguez Matta**. Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá
Chasing Syzygies of Toric Varieties

Resumen: Classical computations of syzygies by means of minimal free resolutions can be particularized to toric ideals. Examples are provided to compare this with a method for computing syzygies from combinatorial information. It is also mentioned how an ample line bundle on a toric variety defines a projective embedding and therefore it can be considered its homogeneous ideal, which (under certain conditions) has some linear syzygies. All of this is turns out to be related to geometry thanks to property N_p

11:30 - 11:50 **Edison Leguizamon Quinche**. Universidad de los Andes
Una Introducción a la Teoría de Sturm-Liouville

Resumen: El estudio de operadores diferenciales de segundo orden ha permitido la resolución de diferentes ecuaciones diferenciales parciales que han sido objeto para diferentes modelos físicos tales la ecuación de Schrödinger o la ecuación de onda. En esta charla se pretende dar un resumen de la teoría de Sturm-Liouville, la cual abarca este tipo de operadores y su desarrollo histórico, presentando los principales intereses y resultados conocidos. Finalmente, se dará una breve descripción del los problemas actuales de esta teoría.

Palabras claves: Teoría de Sturm-Liouville, ecuación de segundo orden, Problemas regulares y singulares, teoría espectral.

12:10 - 12:30 **Cristian Felipe Gallego Olaya**. Universidad de Antioquia.
Carcaj de Auslander-Reiten en $C_n(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ para una k-álgebra hereditaria por partes.

Resumen: Sea Λ una k-álgebra de Artin y modΛ la categoría de Λ-módulos finitamente generados a derecha, sea projΛ la subcategoría plena de modΛ cuyos objetos son todos los Λ-módulos proyectivos. Hablaremos de los resultados principales de la categoría $\mathrm{C}_n\,(\mathrm{proj}\Lambda)$ de complejos acotados de módulos proyectivos de tamaño fijo $n \geq 2$; para el caso en que Λ sea una k-álgebra hereditaria por partes, mostraremos cómo construir el carcaj de Auslander-Reiten en $\mathrm{C}_n\,(\mathrm{proj}\Lambda)$.

Es un problema abierto saber cuándo un morfismo irreducible en $\mathrm{C}_n\,(\mathrm{proj}\Lambda)$ es irreducible en $\mathrm{C}_{n+1}\,(\mathrm{proj}\Lambda)$. Claudia Chaio, Alfredo Chaio e Isabel Pratti dan una solución parcial al problema. Cuando la dimensión global fuerte del álgebra es finita, daremos condiciones para dar solución al problema planteado anteriormente. Es importante mencionar que en el año 2007 Dieter Happel y Dan Zacharia probaron que Λ es hereditaria por partes si y solo si su dimensión global fuerte es finita. Existen técnicas para calcular la dimensión global fuerte de una k-álgebra de dimensión finita. Estableceremos una conección entre el carcaj de Auslader-Reiten de la categoría derivada $\mathrm{D}^b\,(\mathrm{mod}\Lambda)$ y el carcaj de Auslander-Reiten de la categoría $\mathrm{C}_n\,(\mathrm{proj}\Lambda)$, esta relación nos permite dar una nueva técnica para calcular la dimensión global fuerte de una k-álgebra hereditaria por partes.

12:30-14:00 **Almuerzo**.

14:00 - 14:40	**Julián Cano**. Universidad Nacional de Colombia - sede Bogotá *Sobre los problemas del S-espacio y el L-espacio.*

Resumen: En la topología conjuntista, un S-espacio corresponde a un espacio topológico regular que a su vez es hereditariamente separable pero que no es hereditariamente Lindelöf; similarmente, un L-espacio corresponde a un espacio topológico regular que a su vez es hereditariamente Lindelöf pero que no es hereditariamente separable. Los problemas del S-espacio y el L-espacio, considerados durante décadas como "los problemas abiertos más importantes de la topología conjuntista", consisten en resolver las preguntas sobre la existencia de tales espacios topológicos en ZFC. Estos problemas surgieron en los años 20's paralelamente al desarrollo de la topología general y la teoría de conjuntos, sin embargo la solución del problema del S-espacio fue completamente presentada por S. Todorcevic en 1989, quien concluyó que la existencia de S-espacios es independiente de ZFC, mientras que la solución del problema del L-espacio fue eficazmente planteada por J. Moore en 2006, quien construyó un sofisticado L-espacio bajo ZFC.

Por lo tanto, el objetivo de esta charla radica en exponer un panorama general asociado a los problemas del S-espacio y el L-espacio, haciendo énfasis en los elementos inherentes a la teoría de conjuntos, la teoría de Ramsey y la topología conjuntista, que fueron trascendentales e imprescindibles en la solución de tales problemas.

14:50 - 15:10	**Andrés Galindo**. Michigan State University. *Una Introducción al Flujo de Reducción de Curvatura.*

Resumen: En este charla vamos a introducir el concepto de Flujo de Reducción de Curvatura para curvas en el plano, vamos a mostrar la deducción del mismo, un ejemplo fundamental, la deducción de la ecuación diferencial parcial que lo modela, algunos resultados sobre sus soluciones y una generalización en el que el autor obtuvo algunos resultados nuevos.

15:30-16:00 **Descanso/Café**.

16:00 - 16:20	**Tatiana V. Zuluaga Gandolfo**. Universidad de los Andes. *El algoritmo de Berlekamp-Zassenhaus para factorización de polinomios.*

Resumen: El problema de factorización de polinomios con coeficientes enteros sobre los racionales ha sido de gran interés en el álgebra ya que es de gran utilidad para resolver problemas en diferentes áreas como criptografía y geometría algebráica. Aún así, encontrar algoritmos eficientes para factorizar y determinar la irreducibilidad de un polinomio son problemas de gran dificultad.

En esta charla daremos una presentación del algoritmo de Berlekamp-Zassenhaus, el cual nos permite factorizar polinomios de coeficientes enteros sobre los racionales. Este algoritmo se compone de dos pasos principales, a saber, el algoritmo de Berlekamp para factorizar polinomios sobre campos finitos y el lema de levantamiento de Hensel. Se guiará la explicación del algoritmo mediante algunos ejemplos.

16:30 - 16:50	**Jerson Borja**. Universidad de Córdoba - Colombia. *Isomorfismo entre submonoides de $\mathbb{N}^k$ y semigrupos numéricos..*

Resumen: Un resultado de J. C. Rosales [2] establece que un monoide abeliano finitamente generado es isomorfo a un submonoide de $\mathbb{N}^k$ con su suma usual, para algún k, si y solo si tal monoide es libre de torsión, no tiene más unidades que el cero y satisface las leyes de cancelación. Surge el siguiente problema: dado un un monoide abeliano finitamente generado, determinar el menor k de tal forma que dicho monoide sea isomorfo a un submonoide de $\mathbb{N}^k$.

Dado un submonoide H de $\mathbb{N}^k$, definimos el índice de H, denotado ind H, como el mínimo entero positivo k tal que H es isomorfo a un submonoide de $\mathbb{N}^k$.

Damos algunas caracterizaciones para ind H en general; también mostramos algunas condiciones necesarias y sufifientes para que ind $H = 1$, y más aún, mostramos que cuando ind $H = 1$, el submonoide de $\mathbb{N}$ al cual H es isomorfo, es único; esencialmente mostramos que si dos semigrupos numéricos son isomorfos, entonces ellos son realmente iguales (ver [1]).

Referencias

[1] P. A. García-Sánchez, J. C. Rosales, *Numerical semigroups,* Developments in Mathematics Vol. 20, Springer, New York, 2009.
[2] J. C. Rosales, *On finitely generated submonoids of* $\mathbb{N}^k$*,* Semigroup Forum, 50 (1995), 251-262.

Resumen:

Paola Castro Martínez. Universidad de Córdoba - Colombia.
Forma canónica de Jordan

Resumen: En este trabajo estudiamos la forma canónica de Jordan para una matriz cuadrada $\mathbb{A}$ de tamaño $n \times n$, vía valores propios generalizados. La idea es realizar una demostración de la existencia de la forma canónica de Jordan, siguiendo los pasos del siguiente algoritmo:

1. Hallar el polinomio característico de $\mathbb{A}$, el cual está dado por $P_{\mathbb{A}}(x) = det(x\mathbb{I}_n - \mathbb{A})$.
2. Encontrar las raíces del polinomio característico $P_{\mathbb{A}}(x)$, para así obtener el espectro de la matriz $\mathbb{A}$ y la multiplicidad algebráica de cada valor propio de $\mathbb{A}$.
3. Para cada valor propio λ de $\mathbb{A}$, escoger una base para el espacio propio $E_{\mathbb{A}}(\lambda)$.
4. Para cada vector propio en la unión de las bases de los espacios propios, construir una cadena de Jordan.
5. Construir la matriz $\mathbb{P}_{n\times n}$ cuyas columnas corresponden a los vectores propios generalizados hallados en el paso anterior.
6. Calcular $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$. En este paso obtenemos la matriz de Jordan asociada a $\mathbb{A}$.

Un punto crucial en la demostración de la existencia de la forma de Jordan consiste en mostrar, en el paso 4, que para cualquier valor propio λ de $\mathbb{A}$, la suma de las longitudes de las cadenas de Jordan asociadas a λ es igual a la multiplicidad algebráica de λ.

Palabras clave: forma de Jordan, vectores propios generalizados, polinomio característico.

REFERENCIAS

[1] P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices,* Segunda Edición, Academic Press, Londres, 1985.
[2] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.

Steffania Sierra Galvis. Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín.
Producto de grafos no politopales.

Resumen: El estudio de politopos es quizá una de las ramas más antiguas de la matemática. Los politopos convexos en dimensión 2 y 3 aparecieron en un contexto matemático en las civilizaciones egipcia y babilónica cuando se intentaba resolver el problema de calcular el volumen de las pirámides truncadas.

Antes del siglo XX se puede decir que hay tres hechos que fueron de gran importancia para la teoría de politopos convexos [1]. El primero fue la publicación de los Elementos de Euclides, en donde se estudiaron los cinco 3-politopos regulares llamados sólidos platónicos. El segundo, fue el descubrimiento de la fórmula de Euler la cual relaciona caras, vértices y aristas de un politopo convexo en dimensión 3. Esta fórmula puede ser considerada como el inicio de la teoría combinatorial de politopos. El tercer hecho es atribuido a Schläfli, quien alrededor de 1850 descubrió politopos convexos en cuatro dimensiones. La teoría moderna de politopos se estableció alrededor de 1950 por Grünbaum con la publicación de su libro Convex Polytopes en 1967 y con el trabajo de Motzkin, Klee y otros, quienes se interesaron en los problemas combinatoriales de esta teoría [1].

Este trabajo consta de dos partes, en la primera parte se presentan algunas nociones básicas de la teoría de politopos y en la segunda se mostrarán algunos resultados importantes que se acercarán al problema abierto, estos resultados son estudiados en el artículo Politopality and Cartesian Products of Graphs [2].

Preguntas abiertas:

- Dados dos grafos G y H no politopales, ¿cuándo $G \times H$ es politopal?
- ¿Es el producto cartesiano del grafo de Petersen consigo mismo politopal?
- Dados dos grafos politopales G, H de dimensión d y e respectivamente, ¿es posible realizar su producto en dimensiones mayores que $d + e$?

REFERENCIAS

[1] Branko Grünbaum and Geoffrey C Shephard. *Convex polytopes.* Bulletin of the London Mathematical Society, 1(3):257–300, 1969.
[2] Julian Pfeifle, Vincent Pilaud, and Francisco Santos. *Polytopality and cartesian products of graphs.* Israel Journal of Mathematics, 192(1):121–141, 2012.

10:00-11:00 **Daniel Stiven Posada Buriticá**. Universidad del Valle
Construcción del esquema de Hilbert para subgrupos abelianos finitos de $SL(3, \mathbb{C})$

Resumen: Si G es un subgrupo abeliano finito de $SL(3, \mathbb{C})$, el esquema de Hilbert asociado a G, establece una relación entre las representaciones de G y las desingularizaciones del espacio cociente $\mathbb{C}^3/G$ que resulta siendo singular. Por otro lado, las desingularizaciones del espacio $\mathbb{C}^3/G$ pueden ser descritas con el uso de triangulaciones de ciertos conjuntos en un retículo tridimensional. Debido a que no existe una única desingularización, sí es posible definir una distinguida que va a permitir establecer una correspondencia de McKay generalizada, que asocia a cada caracter de G un haz sobre la desingularización de $\mathbb{C}^3/G$.

En este poster se hablará de los avances obtenidos en el proyecto de investigación [1], respecto al problema de encontrar una manera de caracterizar la triangulación de ciertos conjuntos en un retículo tridimensional, induciendo una resolución crepante del espacio singular $\mathbb{C}^3/G$, donde G es un subgrupo abeliano finito de $SL(3, \mathbb{C})$.

Palabras clave: Esquema de Hilbert, desingularización, triangulación.

Referencias

[1] A. Quintero and J. Velásquez, Construcción del esquema de Hilbert para subgrupos abelianos finitos de $SL(3, \mathbb{C})$, 2017.
[2] I. Nakamura, Hilbert schemes of abelian groups orbits, 2000.
[3] Y. Ito and I. Nakamura, Hilbert schemes and simple singularities, 1999.

10:00-11:00 **Jackson Guevara**. Universidad Industrial de Santander.
Anillos totales de fracciones.

Resumen: La construcción de anillos de fracciones es una técnica muy relevante en el álgebra conmutativa, pues éstos generalizan la construcción del cuerpo de los números racionales partiendo de los números enteros, basta considerar una relación de equivalencia definida sobre el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Sea R un anillo conmutativo con unidad y $S \subseteq R$ un subconjunto multiplicativo ($1 \in S$ y $a, b \in S$ entonces $ab \in S$). La relación $\sim$ definida en $R \times S$ mediante $(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow$ existe $u \in S$ tal que $u(at - bs) = 0$, es de equivalencia, denotamos por $\frac{a}{s}$ la clase que contiene a (a, s). Consideremos al conjunto $S^{-1}R = R \times S/\sim$, dotado de las siguientes operaciones:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st} \text{ y } \frac{a}{s}\frac{b}{t} := \frac{ab}{st}.$$

Definen una estructura de anillo denominado anillo de fracciones de R respecto a S. Como mencionamos inicialmente, es posible construir el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ desde el dominio entero de los $\mathbb{Z}$. En general, si tenemos R dominio entero y consideramos a $S = R \setminus \{0\}$, entonces el anillo de fracciones $S^{-1}R$ será un cuerpo, denominado el cuerpo de fracciones de R por S.

Por lo anterior, cabe resaltar que el subconjunto multiplicativo juega un papel determinante en las condiciones del anillo de fracciones tal como se menciona en el caso anterior. Así mismo, si consideramos un anillo conmutativo con unidad R, p un ideal primo de R y consideremos el subconjunto multiplicativo de R como $S = R \setminus p$ entonces, el anillo de fracciones de R por S es un anillo local. A este proceso se le conoce como la localización de R por p.

Cuando consideramos al subconjunto S de los no divisores de cero de R, denominamos al anillo de fracciones como el anillo total de fracciones. Otra manera de definir el anillo total de fracciones es aquella de identificar que sus elementos son invertibles o divisores de cero.

Para efectos de la presentación se mostrarán algunos ejemplos de anillos que son anillos totales de fracciones haciendo uso de la segunda definición dada. Así mismo, se mostrarán algunas relaciones con otros anillos como las que existen con los dominios euclídeos y se probará que el producto de anillos totales de fracciones es un anillo total de fracciones.

Ahora bien, en la geometría proyectiva el estudio de las rectas proyectivas sobre anillos es un problema central, por ello se tratará de dar una breve introducción a la geometría proyectiva trazando un camino para abordar la recta proyectiva sobre los anillos totales de fracciones.

Referencias

[1] Granados, C., Olaya, W., *Anillos totales de cocientes, anillos de Hermite y K-álgebras finitas,* preprint.
[2] Granados, C., *Álgebras finitas sobre un cuerpo. La recta proyectiva*, Tesis doctoral, Dep. análisis mat., álgebra, geometría y topología, Universidad de Valladolid, Valladolid, (2015).
[3] Doneddu, A., *Complementos de geometría algebraica* . J. 35 (1980),38-68.

10:00-11:00 **John Alexis Osorio Monsalve**. Universidad de Antioquia.

El criterio de Schlessinger

Resumen: El criterio de Schlessinger fue presentado en [3] derivado de la tesis doctoral de Michael Schlessinger. A grandes rasgos, es un refinamiento de un teorema presentado unos años atrás por Grothendieck (1928-2014) en [1, Proposición 3.1], el cual establece que un functor covariante

$$F : \mathcal{C}_N^0 \to \text{Sets}$$

tal que $F(k)$ es un punto es pro-representable si y sólo si preserva límites finitos, donde $\mathcal{C}_\Lambda$ es la categoría de Λ-álgebras coeficientes. Dicha condición es equivalente a exigir que el functor preserve pullbacks y su objeto final. Como es de esperarse, dicho teorema es mucho más general, de hecho, la categoría $\mathcal{C}_\Lambda^0$ puede ser reemplazada por cualquier categoría cuyos objetos sean "artinianos." Lastimosamente, la proposición presentada por Grothendieck, en la práctica, es obsoleta, ya que es bastante tedioso verificar la hipótesis, pues incluye una gran cantidad de mapas en dicha categoría, sin características particulares. Es aquí donde Schlessinger "debilitó" dicha hipótesis en condiciones más débiles que en la práctica son menos complejas de verificar.

Está charla está orientada a entender a profundidad el criterio y exhibir un ejemplo puntual de como dicho criterio puede llegar a ser de suma importancia, al tratar con ciertos functores.

Referencias

[1] Alexander Grothendieck. *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébriques. ii. le théorème d'existence en théorie formelle des modules.* In Séminaire Bourbaki : années 1958/59 - 1959/60, exposés 169-204, number 5 in Séminaire Bourbaki, pages 369–390. Société mathématique de France, 1960. talk:195.
[2] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer New York, New York, NY, 1971.
[3] Michael Schlessinger. *Functors of artin rings.* Transactions of the American Mathematical Society, 130(2):208–222, 1968.

10:00-11:00 **Daniel camilo Rodríguez Ruiz**. Universidad Nacional de Colombia

Cuerpos cuadráticos y ley de reciprocidad cuadrática.

Resumen: En esta charla el objetivo es estudiar la aritmética de los anillos de enteros cuadráticos, donde se estudiará la factorización de sus elementos, pero en general no siempre se tiene factorización única con lo cual se estudiará la factorización de ideales y se dará una interpretación de la ley de reciprocidad cuadrática.

Definition 1. Una extensión K de $\mathbb{Q}$ se dice un *cuerpo cuadrático* si K es de dimensión 2 como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. En este caso K es de la forma $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ donde $d \in \mathbb{Z}$ y d es libre de cuadrados.

Definition 2. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, se dice que α es un *entero cuadrático* si $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$; el anillo de enteros cuadráticos se nota por $\mathcal{O}$.

Primero se mostrarán algunos casos particulares de cuerpos cuadráticos junto con sus respectivos anillos de enteros cuadráticos para los cuales se estudiará explicitamente su aritmética, y por lo tanto se mostrará mediante uno de esos ejemplos que no todos los anillos de enteros cuadráticos son dominios de factorización única.

También se hará notar que no siempre el anillo de enteros cuadráticos de $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ es el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$: el anillo de enteros cuadráticos de $K = \mathbb{Q}[i]$ es $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$, pero el anillo de enteros cuadráticos de $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ es $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$ donde $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. En general el anillo de enteros cuadráticos de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ es el anillo $\mathbb{Z}[\delta_0]$ donde

$$\delta_0 = \begin{cases} \sqrt{d} & \text{si } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{1+\sqrt{d}}{2} & \text{si } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Debido a la falta de la unicidad en la factorización de los elementos en algunos de estos anillos se estudian los ideales para poder resolver este problema, y se probará que cada ideal del anillo $\mathcal{O}_K$ puede ser escrito como un producto de ideales primos donde dicha factorización es única salvo el orden de los factores; la prueba será una adaptación de la prueba del Teorema Fundamental de la Aritmética en $\mathbb{Z}$, para poder probar la existencia de la factorización se debe tener un análogo del principio del buen orden en los ideales, el cual es la condición de que el anillo $\mathcal{O}_K$ sea Noetheriano, y para la unicidad de la factorización se debe tener un análogo del lema de Euclides en los ideales, y la propiedad cancelativa de ideales para la cual se introduce la noción de ideal fraccionario.

Una herramienta útil para realizar operaciones de ideales son los retículos, con los cuales se hacen operaciones matriciales y así se tiene una gran ventaja computacional.

Definition 3. Sea V un plano, un retículo $\Lambda \subseteq V$ es un subgrupo aditivo de V de la forma $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$ donde los vectores $v_1, v_2 \in V$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

El retículo canónico Λ_0 $\Lambda_0 := \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ donde e_1, e_2 son los vectores columna 2×1 canónicos.

Ejemplo 1. Como los grupos $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y Λ_0 son isomorfos dado por

$$a + ib\sqrt{5} \longmapsto \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

entonces se identifica un ideal I de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ con un subgrupo $\Lambda_I \subseteq \Lambda_0$.

Calcule IJ donde $I = \mathbb{Z}3 + \mathbb{Z}(1 - i\sqrt{5})$ y $J = \mathbb{Z}7 + \mathbb{Z}(3 + i\sqrt{5})$:

Haciendo todos los productos de los generadores tenemos

$$\begin{aligned} 3 \cdot 7 &= 21 \\ 3 \cdot (1 + i\sqrt{5}) &= 9 + i3\sqrt{5} \\ (1 - i\sqrt{5}) \cdot 7 &= 7 - i7\sqrt{5} \\ (1 - i\sqrt{5})(3 + i\sqrt{5}) &= 8 - i2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Como IJ es el conjunto de todas las $\mathbb{Z}$-combinaciones lineales de los 4 generadores, entonces Λ_{IJ} es el grupo formado por las columnas de

$$\begin{bmatrix} 21 & 9 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

Entonces haciendo reducción por columnas se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 21 & 9 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & -7 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 21 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así como los vectores

$$\begin{bmatrix} 21 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes, trasladándolos de Λ_0 a $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] por medio del isomorfismo se tiene queIJ= \mathbb{Z}21 + \mathbb{Z}(-4 + i\sqrt{5})$

RECIPROCIDAD CUADRÁTICA Y FACTORIZACIÓN

La ley de reciprocidad cuadrática se conoce desde Leonhard Euler en el año 1755 aproximadamente, aunque su forma de entenderla era la siguiente: el caracter cuadrático de a módulo p depende únicamente de la clase de residuo de p módulo 4a, después Legendre introduce el término reciprocidad ya que para él un primo impar p es un residuo cuadrático módulo otro primo impar q si y solo si q es un residuo cuadrático módulo p. Además Legendre definió para los primos impares p y para todo $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p \not| a$, el símbolo $\left(\frac{a}{p}\right)$ con valores en $\{1, -1\}$ dependiendo si a es residuo cuadrático módulo p o no lo es, este símbolo es llamado Símbolo de Legendre, y con ayuda de este se enuncia la ley de reciprocidad cuadrática.

Theorem 1 (Ley de reciprocidad cuadrática)**.** . *Sean p, q primos impares diferentes, entonces:*

1. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.
2. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.
3. $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

Una de las primeras pruebas de la ley de reciprocidad cuadrática fué dada por Gauss en el año 1796, quien realizó aproximadamente 7 pruebas más donde se usaba inducción, formas cuadráticas y las sumas de Gauss. Además, con ayuda de la ley de reciprocidad cuadrática se puede estudiar la factorización de los primos racionales en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.

Definition 4. Sea $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ un cuerpo cuadrático, y sea I un ideal no nulo de $\mathcal{O}_K$. La norma de I es el número natural $N_I := |\mathcal{O}_K/I|$.

El siguiente teorema es la unicidad en la factorización de los ideales.

Theorem 2. *Sea $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ un cuerpo cuadrático y $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros cuadráticos. Para cualquier ideal I no nulo y propio de $\mathcal{O}_K$ existen ideales primos $P_1, \ldots, P_n$ de $\mathcal{O}_K$ tal que $I = P_1 \cdots P_n$. Esta factorización es única salvo una permutación de los factores.*

Definition 5. Sea $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ un cuerpo cuadrático, un invariante básico de K es su *discriminante* d_k el cual está definido por

$$d_k = \begin{cases} d & \text{si } d \equiv 1 \pmod 4 \\ 4d & \text{si } d \equiv 2, 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Se interpreta el símbolo de Legendre en terminos de la factorización de los primos racionales en el anillo $\mathcal{O}_K$.

Definition 6. Sea $p \in \mathbb{N}$, la factorización de $\mathcal{O}_K p$ en ideales primos tiene una de las siguientes formas:

1. $\mathcal{O}_K p = P$ con $NP = p^2$, en este caso se dice que p es inerte.
2. $\mathcal{O}_K p = P^2$ con $NP = p$, en este caso se dice que p es ramificado.
3. $\mathcal{O}_K p = P\overline{P}$ con $NP = p$ y $P \neq \overline{P}$, en este caso se dice que p es split.

Theorem 3. *Sea K un cuerpo cuadrático de discriminante d_k, y sea el automorfismo no tirvial de K denotado por $\alpha \to \overline{\alpha}$. Sea p un primo en $\mathbb{Z}$.*

1. *Si $\left(\frac{d_k}{p}\right) = 0$, entonces $\mathcal{O}_K p = P^2$ para algún ideal P de $\mathcal{O}_K$.*
2. *Si $\left(\frac{d_k}{p}\right) = 1$, entonces $\mathcal{O}_K p = P\overline{P}$ donde $P \neq \overline{P}$ y son ideales primos en $\mathcal{O}_K$.*
3. *Si $\left(\frac{d_k}{p}\right) = -1$, entonces $\mathcal{O}_K p$ es un ideal primo en $\mathcal{O}_K$.*

Theorem 4. *Sea $\mathbb{Z}[i]$ el anillo de enteros Gaussianos, y sea $p \in \mathbb{Z}$, entonces:*

1. *El primo $p \equiv 2$ es el único que ramifica en $\mathbb{Z}[i]$.*
2. *Si $p \equiv 1 \pmod 4$, entonces p es split.*
3. *Si $p \equiv 3 \pmod 4$, entonces p es inerte.*

10:00-11:00 **José Andrés Quintero Campo**. Universidad Nacional de Colombia - sede Bogotá.
Cuerpos locales y la función zeta de Riemann

Resumen: La existencia de infinitud de números primos fue un hecho establecido por Euclides hace ya más dos mil años. El siguiente paso fue dado con el desarrollo del cálculo infinitesimal y el análisis complejo, cuando las investigaciones sobre la distribución de los números primos llevaron a Gauss y a Legendre a conjeturar, de forma independiente, que $\pi(x) \sim x/\log x$, con $\pi(x)$ la función contadora de primos.

Es así como aparece en 1859 el único trabajo publicado de Riemann sobre teoría de números. Riemann, más que en una estimación asintótica estaba interesado en poder encontrar una fórmula exacta que diera la cuenta de los números primos, es decir, una fórmula para calcular exactamente $\pi(x)$ (ver [1]). Para ello Riemann se inspira en la factorización encontrada por Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

válida cuando $\Re(s) > 0$. Denota además por $\zeta(s)$ a la función analítica que define la serie $\sum n^{-s}$ cuando es convergente y extiende el dominio de la función a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, resultando $\zeta(s)$ con un polo simple en $s = 1$. También, encuentra la ecuación funcional

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Riemann propone luego despejar $\pi(x)$ en términos de $\zeta(s)$, llegando a una fórmula que depende de los ceros no triviales de $\zeta(s)$. La charla se enfocará precisamente en mostrar cómo se puede entender mejor $\zeta(s)$ y su ecuación funcional haciendo análisis sobre cuerpos locales.

Los cuerpos locales son cuerpos topológicos localmente compactos y no discretos, el prototipo de cuerpo local es $\mathbb{R}$, que es la completación de $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto usual. Sin embargo es posible definir también otras normas sobre $\mathbb{Q}$ de forma que al completar $\mathbb{Q}$ con estas normas obtengamos cuerpos locales diferentes. Sea por ejemplo p un primo y definamos el valor absoluto de un racional a como $|a|_p = p^{-k}$, en donde k es el único entero que por el teorema fundamental de la aritmética hace que $a = p^k t$ $t \in \mathbb{Q}$. Este valor absoluto define una ultramétrica sobre $\mathbb{Q}$, y su completación, que denotamos por $\mathbb{Q}_p$, resulta ser una extensión de $\mathbb{Q}$ y un cuerpo local. El teorema de Ostrowski nos dice que $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{R}$ son esencialmente los únicos cuerpos locales que podemos obtener completando los racionales con algún valor absoluto.

En todo cuerpo local tenemos tanto en su grupo multiplicativo como en su grupo aditivo, una medida invariante bajo traslaciones, esta es su medida de Haar, con la que podemos hacer integración y análisis armónico sobre cuerpos locales. De esta forma definimos para cada $\mathbb{Q}_p$ con p primo y con $\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$, las funciones zeta locales

$$\zeta_p(s) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \phi_p(x)|x|^s \, d^\times x;$$

en donde $\phi_p(x)$ es la característica de $\overline{B}(0;1)$ en $\mathbb{Q}_p$ cuando p es primo, y $\phi_\infty(x) = e^{-\pi x^2}$. También, la medida cuando p es primo es tal que $d^\times x(\overline{B}(0;1)) = 1$, con lo que obtiene el siguiente resultado

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi_p \zeta_p(s),$$

siempre que $\Re(s) > 1$ y con p recorriendo los primos y ∞. Usando esta representación, se verá como probar la ecuación funcional de la función $\zeta(s)$. Este enfoque de la función zeta de Riemann con cuerpos locales se puede encontrar en [2].

Referencias

[1] H.M Edwards, Riemann's zeta function, Academic press, New York-London 1974
[2] A. Weil, Basic number theory, Springer-Verlag, New York 1967

10:00-11:00	**Juan Felipe Rodríguez Q.**. Pontificia Universidad Javeriana. *Introducción a la Teoría Geométrica de Grupos.*

Resumen: La teoría geométrica de grupos estudia los grupos finitamente generados, a través de las conexiones entre las propiedades algebraicas de dichos grupos y las geométricas y topológicas de los espacios en los que estos actúan. En esta charla se dará una introducción a distintas herramientas que se usan en la teoría geométrica de grupos, como lo son: los grafos de Cayley, las funciones de crecimiento de gruposy las cuasi-isometrías. En particular se van a dar dos ejemplos explícitos que son: el grupo de Lamplighter $\mathcal{L}$ y el grupo de Thompson $\mathcal{F}$. Finalmente, se concluirá con el lema de Svarc-Milnor y su versión topológica que intuitivamente permite ver a un grupo como un espacio metrico hasta cuasi-isometrías, bajo ciertas condiciones.

10:00-11:00	**David Leonardo Ariza Sánchez**. Pontificia Universidad Javeriana . *Paradoja de Banach Tarski y Teoría de Grupos.*

Resumen: La paradoja de Banach-Tarski es un resultado contra intuitivo que nos permite ver las limitaciones y problemas, no solo de la medida de Lebesgue, sino de asumir el axioma de elección. En su versión más caótica, nos dice que podemos cortar una semilla en tantos pedazos como para llenar completamente al sol.

La causa de esta paradoja viene dada por el grupo $SO(\mathbb{R}^3)$, que admite un subgrupo libre de orden dos, el cual es uno de los primeros ejemplos conocidos de grupos paradójicos, esto es, un grupo que se puede dividir en finitas partes disjuntas, de tal manera que al poner actuar al grupo sobre algunas de estas nos da todo el grupo completo.

Siguiendo lo anteriormente expuesto, se definen grupos amenables como aquellos que no admiten una descomposición paradójica; en esta charla se introducirán estos grupos y se darán varias definiciones equivalentes que nos permiten conectar la teoría de grupos con la teoría de la medida y el análisis funcional.